现代资产组合理论在中国市场的创新与应用研究

周叶芹， 吴　笛， 黄　莉， 王祎晨， 周子栋
（浙江工商大学 杭州商学院，浙江 杭州 311500）

摘要：现代资产组合理论是金融投资最为经典的理论之一，已经被广泛应用于美国的资产配置和组合选择业务。但是，理论界和实务界对于该理论本身的缺陷以及是否适用于我国股票市场一直存有较大争议。本研究根据理论构建了最小风险、最大夏普比的策略组合以及其他常用的策略组合，通过绩效评估指标对几种策略绩效进行比较以验证理论在国内的适用程度。

关键词：资产组合理论；均值－方差；中国资本市场；投资组合业绩评价
中图分类号：F830.59　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：2095－0098（2019）06－0034－06

一、前言

现代资产组合理论推动了当前资产管理业务趋向组合化、科学化，均值－方差模型作为现代资产组合理论中的经典，在 1952 年由美国经济学家 Harry Markowitz[1] 提出，其后又在 William Sharpe、Stephen Ross 等人的深化下衍生为资本资产定价、套利定理等理论，是现代金融学的核心研究方向之一[2]。

均值－方差模型实际上属于二次规划问题，传统模型可以通过拉格朗日乘子法求解。不可做空情况下的均值－方差模型比较复杂，并不能得到解析解，一般采用蒙特卡洛、分枝定界等算法来求解优化问题。当然也包括一些启发式算法，如张鹏（2008）运用不等式组的旋转算法并结合序列二次规划法求解不允许卖空情况下的均值－方差投资组合模型[3]；林清泉和张建龙（2009）采用遗传算法寻找模型的近似最优解，并用一个债券组合说明该方法的有效性[4]。

策略选择是现代投资组合理论的研究热点之一。有学者指出，Markowitz 投资组合模型存在致命的参数估计误差无法完全规避的问题，导致模型的解集不稳定。Michaud（1989）提到“马科维茨优化之谜”[5]，实际中参数估计产生较大误差导致模型实用性低。Frankfurter[6] 等认为市值加权策略在美国证券市场更为有效，不同策略在不同环境的市场表现不同。曾颖苗等（2009）建立了用 VaR 代替方差作为风险度量指标的均值－VaR 投资组合模型，发现中国证券市场中均值－方差策略优于等权组合策略[7]。李金鑫（2014）等认为均值－方差策略在中国市证券场表现最好，却在统计方面稍逊等权组合策略[8]。

在已有的研究基础上，本文给出了一种基于解析解的方法，以此解决卖空限制的投资组合优化问题。通过实证分析比较均值－方差、最小风险投资组合以及 Frankfurter、李金鑫等学者提出的“板块市值加权、个股市值加权、简单等权”策略之间的绩效，以验证 Markowitz 投资组合模型在中国资本市场的实用性。

二、Markowitz 投资组合模型与解析解

（一）基于卖空限制的资产组合模型

基于收益率均值和方差的资产组合模型，美国经济学家 Markowitz（1952）将金融投资的收益和风险量化为收益率均值、方差约束下的规划过程，认为在资产收益率服从多元正态分布、投资者厌恶风险、遵循投资分散化原则并且使用效用函数进行投资的假设下，可以人为进行资产标的收益风险规划而降低投资组合风险，并在给定预期收益率（或风险水平）下，实现证券组合的最大预期收益（或最小组合风险）。以组合收益率标

收稿日期：2019－06－21
作者简介：周叶芹（1964－），女，浙江嵊州人，教授，研究方向为金融统计。

准差和期望值作为横、纵坐标轴,模型的可行解集为一条凹向原点的边界曲线,曲线的上半部分被称为有效前沿。

由于我国实行独特的“T + 1”证券交易制度,并且在市场中做空证券的成本较高,几乎没有投资者能够卖空 A 股股票,因此研究卖空限制的投资组合模型更符合国内市场的实际情形。此时,卖空限制的资产组合模型等价于个股权重非负、各资产权重和为 1、以资产组合最小方差为目标函数的规划方程,如下所示:

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j Cov(r_i, r_j)$$

$$s.t. \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i w_i = \mu \\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \\ w_i \geqslant 0, i = 1,2,\cdots,n) \end{cases}$$

(二) 资本配置与资产组合

引入无风险资产后,资本可以在无风险资产与证券市场间自由分配,产生的新组合收益与风险的线性关系叫做资本配置线(CAL):

$$E(R_M) = R_f + \frac{E(R_p) - R_f}{\sigma_p}\sigma_M$$

其中,$E(R_M)$ 为引入无风险资产后的资本市场组合期望收益率,σ_M 为市场组合风险,资本配置线的斜率 $\frac{E(R_p) - R_f}{\sigma_p}$ 也被称作夏普比率。

当资本配置线的斜率与有效前沿相切时,资产组合的夏普比率达到最大,切点为资产组合有效前沿上的最优资本配置点,资本配置市场有效且达到均衡,所有有效组合是不同风险偏好的投资者在无风险资产与市场组合间自由分配的结果。

(三) 资产组合的有效前沿与资产权重

引入拉格朗日乘子和库恩塔克乘子 β 求解上述规划模型,根据目标函数 $L(w, \lambda_1, \lambda_2, \beta)$ 和模型约束构造拉格朗日函数,再求函数的一阶偏导 $\frac{dL}{dw}$:

$$\frac{dL}{dw} = 2\Sigma w - \lambda_1 R - \lambda_2 1_n - \beta = 0$$

将证券按收益率降序后,不妨令前 k 个资产权重大于零,记前 k 个资产权重和资产收益率协方差矩阵分别为 w_I、Σ_I,其中 $I = 1,\cdots,k$,则 $w = \begin{bmatrix} w_I \\ 0_{n-k} \end{bmatrix}$,同理 $\beta = \begin{bmatrix} 0_I \\ \beta_{n-k} \end{bmatrix}$。同时将协方差矩阵的逆 Σ^{-1} 分块为 $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$,记 $A_1 = [A_1 1 \quad A_1 2]$,将 I 式两边乘以 Σ^{-1},根据可逆矩阵的性质 $\Sigma\Sigma^{-1} = E$,有 Σ^{-1} 与分块矩阵以及权重向量 w 的关系:

$$\Sigma_I^{-1} = A_{11} - A_{12}A_{21}A_{22}^{-1} \tag{1}$$

$$2w - \lambda_1 \Sigma^{-1} R - \lambda_2 \Sigma^{-1} 1_n - \Sigma^{-1}\beta = 0 \tag{2}$$

将(1)代入(2)中,等式分别乘以 R_I^T、1_I^T,不妨令 $a = R_I^T \Sigma_I^{-1} R_I$,$b = R_I^T \Sigma_I^{-1} 1_I$,$c = 1_I^T \Sigma_I^{-1} 1_I$,化简得到拉格朗日乘子 λ_1、λ_2 与投资组合期望收益 μ 的关系式:

$$2 \cdot \begin{bmatrix} \mu \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

进一步化简资产组合的目标函数:

$$\sigma_p^2 = w_I^T \Sigma_I w_I = \frac{1}{4} [\lambda_1 \quad \lambda_2] \begin{bmatrix} R_I^T \Sigma_I^{-1} R_I & R_I^T \Sigma_I^{-1} 1_I \\ R_I^T \Sigma_I^{-1} 1_I & 1_I^T \Sigma_I^{-1} 1_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \tag{4}$$

联立(3)(4),得到限制卖空的投资组合风险与期望收益的关系,即有效前沿解析解:

$$\sigma_p^2 = [\mu \quad 1]\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \mu \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{c\mu^2 - 2b\mu + a}{ac - b^2} \tag{5}$$

固定投资风险下,资产组合按照单资产期望收益率降序加权配置,由于受到卖空限制,在资产组合风险逐渐增加的过程中资产标的权重最低为 0,在资产权重为 0 时,该资产会变得“冗余”,资产组合模型的有效参数和解集会随着这些“冗余”资产的剔除而发生改变。与传统投资组合模型相比,受到卖空限制的 n 个资产构成的资产组合模型的有效解集是 $n-1$ 条 Markowitz 有效前沿包络曲线。

三、Markowitz 策略在沪市的实证研究

(一) 数据选择

以中国沪深市场为背景,随机从不同行业抽取五支证券构建资产组合,选取样本长度为三年(2015 年 1 月至 2018 年 1 月) 的证券前复权周收益率数据,计算证券收益率的期望值,资产组合按照期望值升序排列,计算收益率的方差和协方差,具体结果见表 1。

表 1 证券相关数据

证券	期望收益率 %	收益率协方差			
贵州茅台	0.9836	15.9826	5.7453	5.4374	5.1775
恒瑞医药	0.7957	5.7453	11.2031	6.3802	5.9361
大族激光	0.7680	5.4374	6.3802	34.2397	20.1032
三安光电	0.6659	5.1775	5.9361	20.1032	28.2756
招商银行	0.4969	6.9670	3.7157	4.1339	2.7195

(二) 以解析解构建资产有效配置

1. 资产组合有效前沿

在卖空限制的 A 股市场,当投资组合中的某个资产权重为 0 时,该资产变得“冗余”,本例中的 5 个风险资产构成的资产组合经历了 4 次“冗余”资产剔除,参数发生了 4 次改变,依次将剔除的资产数据代入 $a = R_I^T \Sigma_I^{-1} R_I, b = R_I^T \Sigma_I^{-1} 1_I, c = 1_I^T \Sigma_I^{-1} 1_I$,计算得到资产组合有效前沿曲线:

$$\sigma_p^2 = \begin{cases} \dfrac{1335\mu^2 - 1912\mu + 836}{20}, 0.7161 \leqslant \mu \leqslant 0.8770 \\ \dfrac{1141\mu^2 - 1909\mu + 836}{4}, 0.8770 \leqslant \mu \leqslant 0.8831 \\ \dfrac{1115\mu^2 - 1901\mu + 835}{2}, 0.8831 \leqslant \mu \leqslant 0.9410 \\ \dfrac{1075\mu^2 - 1851\mu + 819}{2}, 0.9410 \leqslant \mu \leqslant +\infty \end{cases}$$

2. 资产最小风险与最优配置组合

当 $c\mu^2 - 2b\mu + a = 0$,即 $\mu = \frac{c}{b}$ 时投资组合存在最小风险点 p^*,将点坐标代入(2)(3) 中就可以算出投资组合最小风险点的资产权重 w^*,本例资产组合的最小风险点位于第一条有效前沿上,权重 $w^* = \frac{1}{2}\Sigma^{-1}(\lambda_1^* 1 + \lambda_2^* R) = \begin{bmatrix} 0.1407 \\ 0.4285 \\ 0.0160 \\ 0.1084 \\ 0.3063 \end{bmatrix}$,其中 $\begin{bmatrix} \lambda_1^* \\ \lambda_2^* \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \mu \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14.9865 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$。

当夏普比率达到最大时,资产组合达到有效前沿上的最优资本配置点。通过生成 1000 个期望收益值,并根据(5) 式计算得到 1000 个有效前沿上的点 $p_j, j = 1,2,\cdots 1000$,找到有效前沿曲线上最大夏普比率点 p_j^* 即为资产组合最优配置点,再将 p_j^* 点坐标代入(2)(3) 中计算权重 w_j^*。本例资产组合的最优资本配置点位于

第二条有效前沿上，权重 $w_j^* = \frac{1}{2}\Sigma^{-1}(\lambda_1^* \ 1 + \lambda_2^* \ R) = \begin{bmatrix} 0.4605 \\ 0.4596 \\ 0.0667 \\ 0.0132 \\ 0 \end{bmatrix}$，其中 $\begin{bmatrix} \lambda_1^* \\ \lambda_2^* \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mu \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.3537 \\ -0.7355 \end{bmatrix}$。

最后，穷举列出一些加和为 1 的权重向量，计算按照这些权重配置的资产组合的标准差和收益预期，并将这些数据与有效前沿、最小风险点、最优配置点画在坐标图上，得到图 1。图中的黑色实线是之前算出的有效前沿与资本配置线，小圆圈是穷举出的组合，五个三角形对应的是五个原生股票。

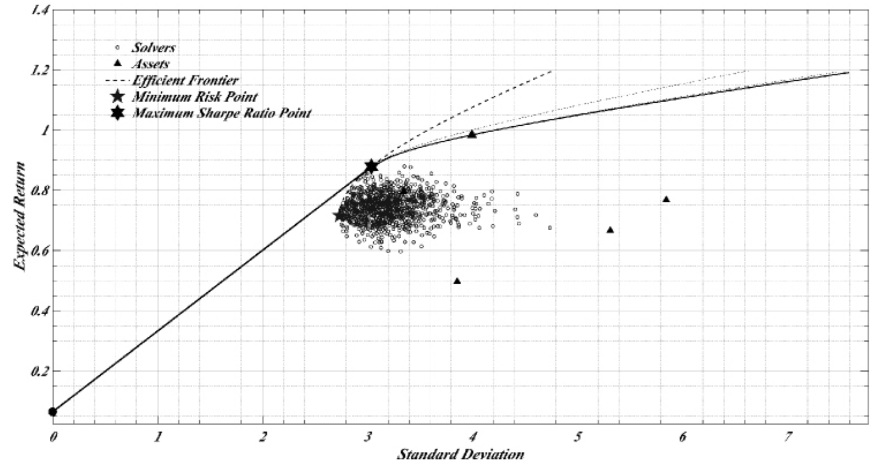

图 1　资产组合与有效前沿

（三）其他资产配置策略

个股市值加权、板块市值加权、简单等权是常用的资产配置策略，鉴于曾颖苗（2009）、李金鑫（2014）等学者所持有的不同观点，不妨同时将这三个策略用于构建资产组合，最后通过业绩评价的方式对其进行评述。

提取这五个资产在 2018 年初的市值规模、归属板块的市值规模，通过线性加权的办法求得资产权重后构建投资组合。汇总所有投资策略组合的资产权重情况，结果见表 2、表 3。

表 2　标的资产及归属板块市值

标的资产	贵州茅台	恒瑞医药	大族激光	三安光电	招商银行
个股市值	8760.4744	1943.1666	527.1302	1035.5121	5986.5358
板块市值	16853.55	39505.5692	7264.2563	5941.3943	97075.3680

表 3　投资组合资产权重一览

标的资产	贵州茅台	恒瑞医药	大族激光	三安光电	招商银行
个股市值加权	0.4800	0.1065	0.0289	0.0567	0.3280
板块市值加权	0.1011	0.2371	0.0436	0.0357	0.5825
简单等权	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20
最大夏普	0.4605	0.4596	0.0667	0.0132	0
最小风险	0.1407	0.4285	0.0160	0.1083	0.3063

（四）投资组合绩效评价

用三年历史周线数据估计参数 μ、σ_p，以此构建 Markowitz 均值 - 方差和最小方差组合。记这两个组合为 S1、S2，风险资产 A1，…，A5。回测结果显示，收益率方面，累计收益最高的资产是贵州茅台，达到了 296.99%，均值 - 方差组合的绝对收益达到了 244.31%，其次是恒瑞医药。收益率回撤方面，最大夏普和最

小风险组合的风险度更低,两个策略在风险管理方面的也同样占有较大优势。

表 4 风险资产与 Markowitz 资产组合回测情况(2015.01 – 2018.1)

	S1	S2	A1	A2	A3	A4	A5
收益	244.31%	174.76%	296.99%	208.85%	149.02%	122.56%	90.91%
夏普比率	14.74	13.34	12.5483	12.1238	6.6938	6.3871	6.5679
最大回撤	20.30%	21.49%	24.38%	18.13%	46.83%	39.93%	26.16%
收益/回撤	12.03	8.13	12.18	11.52	3.18	3.07	3.48

观察上述五个资产组合在之后六个月的业绩走势,用绩效评估指标来比较资产组合以验证策略的稳定性,结果见表 5、图 2。从产生的收益上看,绝对收益和超额收益最高的是均值 – 方差组合,其次是最小风险组合。在系统风险和总风险基础之上对投资的收益风险进行调整,特雷诺比率和收益/最大回撤比率分别反映资产在单位系统风险和总风险下的盈利能力,经过系统性风险和总风险调整之后,按超额收益排名第一、第二的也是均值 – 方差组合和最小风险组合。从波动性上看,两个组合的最大回撤只有市场风险的一半,投资风险经过 Markowitz 配置之后得到了明显的控制;市值加权和板块市值加权组合相对市场的波动性更低,系统性风险程度低于其他组合以及整个市场。

均值 – 方差和最小风险组合是所有策略中表现最好的两支投资组合,个股市值加权和板块市值加权两个组合表现较为相似,说明行业走势与业内个股的走势密切相关。简单等权在收益方面优于前两个策略,回撤也有所改善,在极端行情下,重仓某个行业的投资组合可能比不上简单等权的投资组合。这五个组合的绝对收益率均和最大回撤均跑赢沪深 300 基准指数,说明通过组合投资能够在短时间内规避一定的市场风险。

表 5 四类投资组合策略表现(2018.01 – 2018.07)

策略	市值加权	板块加权	等权	最大夏普	最小风险	沪深 300
绝对收益	–8.11%	–8.68%	–5.04%	8.43%	1.14%	–17.33%
最大回撤率	15.45%	17.76%	13.39%	12.73%	12.43%	24.09%
特雷诺比率	–0.1570	–0.1613	–0.0659	0.2068	0.0659	–0.3807
收益/回撤率	–0.0168	–0.0141	–0.0100	0.0304	0.0097	–0.0304
詹森 α	0.1931	0.1831	0.3186	0.5717	0.4005	/
贝塔系数	0.8632	0.8347	1.0122	0.9732	0.8967	1
夏普比率	–3.71	–3.12	–1.75	5.08	1.55	–12.50

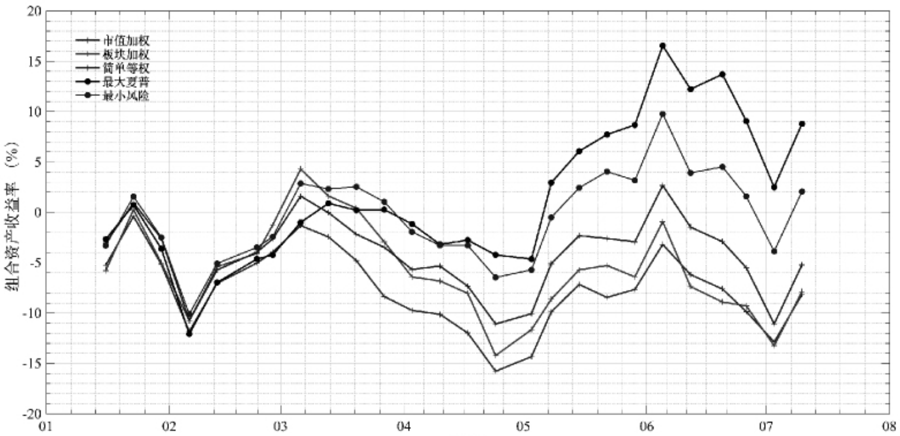

图 2 资产策略的表现(2018.01 – 2018.07)

四、总结

本文给出了资产组合卖空限制模型的表达式,将生成有效前沿点的坐标代入解析解中可以得到两个 Markowitz 资产组合的权重。这种方法解决了卖空限制的资产组合模型的数据运算问题,以此进行计算要比

穷举和蒙特卡罗法更快也更准确,可以优化理论在量化投资实务的应用。

实证分析部分,构建的五个资产组合在期间收益和风险都跑赢了市场,说明短期内主动的投资管理能够战胜市场。利用三年数据预测半年的均值 - 方差组合具有良好的盈利性并且降低了投资风险,对国内市场的资产管理业务有一定的实践指导意义。

不足之处在一方面投资组合标的数量偏少,随机生成的资产标的不能完全代表市场;另一方面是参数估计问题,不同估计方法之间的参数微小偏差可能导致完全不同的结果,但目前学术界和实务界并没有统一的估计方法。

参考文献:

[1] Markowitz H. Portfolio Selection. Theory & Practice of Investment Management: Asset Allocation Valuation Portfolio Construction & Strategies Second Edition [M]. New jersey: John Wiley & Sons Inc, 2011.

[2] 齐岳,张喻姝. 建设一流大学背景下投资组合理论与管理课程构建研究与探索 [J]. 金融教育研究,2018(2):66 - 73.

[3] 张鹏. 不允许卖空情况下均值 - 方差和均值 - VaR 投资组合比较研究 [J]. 中国管理科学,2008(4):30 - 35.

[4] 林清泉,张建龙. 均值 - VaR 模型的一种新解法:鞍点近似、遗传算法 [J]. 数理统计与管理,2009(1):59 - 63.

[5] Michaud R O. The Markowitz Optimization Enigma: Is 'Optimized' Optimal? [J]. Financial Analysts Journal, 1989, 45(1):31 - 42.

[6] Frankfurter G M, Phillips H E, Seagle J P. Portfolio Selection: The Effects of Uncertain Means, Variances, and Covariances [J]. Journal of Financial & Quantitative Analysis, 1971, 6(5):1251 - 1262.

[7] 曾颖苗,张珺,张晴. 马科维茨模型在股市最优投资组合选择中的实证研究 [J]. 湘潭师范学院学报:社会科学版,2009,31(4):88 - 91.

[8] 李金鑫,涂巍,王治国,等. 最优资产配置模型适用于中国股票市场吗 [J]. 当代经济科学,2014,36(2):52 - 61.

The Innovation and Application of theModern Portfolio Theory in China

ZHOU Yeqin,　WU Di,　HUANG Li,　WANG Yichen,　ZHOU Zidong

(Zhejiang Gongshang University Hangzhou College of Commerce, Hangzhou, Zhejiang 311500, China)

Abstract: In terms of financial investment, the modern portfolio theory is one of the most classical theories that is widely used in asset allocation and portfolio combination in the United States. Nevertheless, there has been argued that if there was defects of this theory theoretically as well as practically and whether it is applicable in Chinese stock market. Based on this theory, the essay constructs a portfolio and other asset strategies with minimum risk and mean - variance and compares performance appraisal index of different strategies to verify the applicability of Markowitz theory in China. Moreover, the essay conducts weight formula of portfolio theory and applies it to Chinese portfolio, which simplifies the computation of the model significantly.

Key words: Portfolio Theory; Mean - Variance model; Chinese Capital Market; Applicability; Portfolio Performance Appraisal

(责任编辑:沈　五)