基于公共投资的内生增长:模型与政策

任 力[1], 高 磊[2]
(1. 厦门大学 经济学院,福建 厦门 361005;2. 山东省新泰市商务局,山东 新泰 271200)

摘要:我国公共投资由各级政府部门主导,基于这一实践,文章在经典的拉姆齐-卡斯-库普曼斯模型的基础上,引入政府行政机构的最优化行为,说明在政府主导公共投资的增长方式下公共投资效率对经济增长和福利的影响。研究结果表明,存在一个公共投资效率的梯级,居民福利水平也呈现系列梯级分布,而且公共投资的生产效率梯级越高,居民福利水平梯级也越高。因此,在当前政府主导公共投资的增长方式下,采取有效措施提高公共投资的效率并使其位于关键值之上,这对于居民和政府机构是双赢的举措。

关键词:内生增长;公共投资效率梯级;居民福利
中图分类号:F830.59 文献标识码:A 文章编号:2095-0098(2015)03-0054-09

一、导言

经典的索洛模型(Solow,1956)通过引入资本积累揭示经济增长的原因,但资本积累既不能理解长期经济增长,也不能解释国家之间收入差异。上个世纪八十年代兴起的内生增长理论则放弃了简单的资本单一要素积累理论,代之以保持经济持续增长所必须的技术条件及技术进步机制,推进了增长理论的创新。在内生增长理论中,具有代表性的有两种模型。第一类是阿罗(Arrow,1962)[1]提出的干中学模型,扬(Young,1991)[2]提出的国际贸易内生增长模型。第二类是内生技术进步与资本回报递增模型,如罗默(Romer,1986,1990)[3][4]提出的强调生产要素外溢效应模型,卢卡斯(Lucas,1988)[5]的人力资本积累模型,格罗斯曼与赫尔普曼(Grossman,Helpman,1991)[6]的横向创新模型,以及阿洪与豪依特(Aghion,Howitt,1992)[7]的纵向创新模型。以上内生增长模型都是基于经典的拉姆齐-卡斯-库普曼斯模型,没有区分私人投资和公共投资。在具有公共投资因素的内生增长模型中,巴罗(Barro,1990)[8]沿用拉姆齐-卡斯-库普曼斯模型的基本假设,通过平衡财政预算约束,将公共投资是作为流动变量纳入生产函数,影响私人资本的边际生产率,最终导致内生经济增长。但是该模型的缺点是忽视了公共投资与私人投资的不同,缺少公共投资确定的内在机制,其公共投资是通过直接资本形成增加资本存量。这与我国当前国情下,公共投资是由政府尤其是各级行政机构主导的投资模式很不相同。对于一个经济转型的国家,特别是政府处于强势地位的情况下,将政府行政机构的行为特征纳入分析是非常重要的。这里,我们提出的假设是政府行政机构的决策目标是最大化其自己的终身效用水平。这一观点体现了公共选择学派的思想,它类似于居民在消费决策中使其效用最大化相类似。本文在上述思想的基础上,提出一个基于政府行政机构主导的公共投资内生增长模型,并分析其相应的政策意义。

二、模型设定

本文的内生增长模型同时考虑家庭和政府行政机构的最优化行为。理论上,两者在决策顺序可以分为

收稿日期:2015-02-26
基金项目:福建省教育厅社会科学研究项目(JA12005S);中国博士后基金项目(2012M520086);中国博士后基金特别资助项目(2013T60633)
作者简介:任 力,男,四川西充人,教授,博士生导师,北京大学光华管理学院工商管理博士后流动站、福建省政府发展研究中心工作站博士后研究人员;高磊,山东省新泰市商务局经济师。

合谋和非合谋决策两种基本类型,然而,在实践中非合谋决策更为现实。因此,本文的决策顺序指后一种类型。所谓非合谋决策是指居民对消费、政府行政机构对公共投资分别作出决策的情况。

为将分析重点集中在消费和公共投资的内生决定机制上,本文假设人口增长率为零且不单独考虑生产技术因素。假设私人资本折旧率为 100% ,初始的私人资本存量表示为 k_{-1}。假设政府是每期预算平衡的,唯一的收入来源是消费税,税率用 τ 表示,区间是(0,1)。

类似于经典的拉姆齐 - 卡斯 - 库普曼斯家庭最优模型的结构,首先在代表性家庭效用函数具体设定上,采用瞬时效用函数形式,其函数形式为:$\sum_{t=0}^{\infty}\beta^{t}\ln c_{t}$　(1)

为明确考虑私人资本和公共投资的作用,设定可分的生产函数,对于私人资本的生产函数采用柯布 - 道格拉斯型的生产函数,若 $t-1$ 期私人资本为 k_{-1},根据本文假设,t 期的资本为 k_{t-1}^{α},其中 α 是私人资本生产的弹性系数,其值范围为(0,1)。公共投资主要包括高速公路、教育和基础科研等。高速公路当前的生产效率较高,类似于私人资本其边际生产率很可能是递减的,而教育与基础科研当前的生产效率较低,类似人力资本其边际生产率很可能是递增的。两种效应综合起来,设定公共投资的边际生产率可用一个参数表示,它能够综合考虑生产率减少或增加的结果,这对于政府主导公共投资的增长方式下明确公共投资效率的意义已经足够。因此本文设定公共投资的生产函数为线性形式。同时,我们设定公共投资为单期流量,这样既可简化数理分析又不影响公共投资的内生化的主要经济含义。这种单期化的处理方式类似于拉姆齐 - 卡斯 - 库普曼斯模型中设定私人资本初期存量为零及其折旧率为 100% 的情况。基于这些考虑采用单期线性形式,用 e_t 表示 t 期的公共投资,参数 m 表示公共投资的生产效率,若公共投资项目的决策、管理等环节正常,则 m 显然是非负的,因此设定公共投资的生产效率 $m \geqslant 0$。基于这些考虑可得家庭预算约束为:$k_{t-1}^{\alpha}+me_{t}=(1+\tau)c_{t}+k_{t}-k_{t-1}+\delta k_{t-1}$,该式左边表示 t 期的生产;右边表示 t 期的分配,其中消费的部分为 c_t,税收的部分为 τc_t,投资的部分为本期的净投资与上期重置投资之和,即 $k_{t}-k_{t-1}+\delta k_{t-1}$,参数 δ 表示私人资本的折旧率。为了保证动态最优问题可解,使整个模型集中对公共投资的效率分析,以简化预算约束式,设私人资本折旧率为 100% 。这样,家庭预算约束条件简化为:

$$k_{t-1}^{\alpha}+me_{t}=(1+\tau)c_{t}+k_{t} \tag{2}$$

由政府每期预算平衡条件,将政府购买 g_t 用政府预算约束 $\tau c_{t}=g_{t}+e_{t}$ 代替,效用跨期贴现率为 β,得到政府行政机构终身效用函数为:$\sum_{t=0}^{\infty}\beta^{t}(\tau c_{t}-e_{t})$　(3)

公共投资的范畴主要包括基础设施投资、教育和基础科研投入。消费水平提高意味着生活费用提高,基础设施建设、教育和基础科研人员的工资也应提高以保证一定的生活水准,因此设定法律规则:$e_{t}=Ac_{t}$,即 t 期的公共投资与 t 期的消费水平直接挂钩。其中,参数 A 表示相对消费的公共投资比例。法律事先规定投资比例的基本范围,该范围一方面保证投资比例非负,另一方面保证居民消费和政府行政机构的购买支出为正。由此规则,政府行政事务确定权体现在投资比例的具体确定上。由于有此法律规则,居民在这种规则下先行决定最优消费是理性的。基于这些考虑,本文接下来正式考虑居民消费决策先行、政府行政机构公共投资决策后行的非合谋情况下的公共投资内生增长模型。

三、模型分析

拉姆齐 - 卡斯 - 库普曼斯模型,代表性居民的决策目标是终身效用函数最大化,其约束条件满足我们上述分析。因此,可以建立下列模型:

$$Max\sum_{t=0}^{\infty}\beta^{t}\ln c_{t} \tag{4}$$

$$s.t: k_{t-1}^{\alpha}+mAc_{t}=(1+\tau)c_{t}+k_{t} \tag{5}$$

考虑贝尔曼值函数迭代:$V_{j+1}(k)=\max\{\ln c_{t}+\beta V_{j}(\tilde{k})\}$　(6)

其中,$\tilde{k}$ 表示下一期的资本。为求解该动态最优问题,首先猜测价值函数 $V(k)=E+F\ln k$,然后采用待定系数法确定其具体表达式,过程如下:

考虑 $V(k)=\max\{\ln c+\beta V(\tilde{k})\}$,利用一阶条件:$1/c=\beta V_{k}(\tilde{k})(1+\tau-mA)$,和所猜测的函数解的表达式 $V(k)=E+F\ln k$,将 $\tilde{k}=k^{\alpha}-(1+\tau-mA)c$ 带入一阶条件,得到 $c=k^{\alpha}/(1+\beta F)(1+\tau-mA)$。将 $\tilde{k}$ 和

c 关于 k 的表达式代入 $V(k)=\max\{\ln c+\beta V(\tilde{k})\}$，利用等号两边对任意 k 成立的性质得到 E、F 的参数表达式，其结果如下：

$$E=\frac{1}{1-\beta}\left[\ln(1-\alpha\beta)-\ln(1+\tau-mA)+\frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta}\ln\alpha\beta\right],F=\frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta}$$

由值函数迭代解的唯一性即可确定该最优问题的价值函数表达式如下：

$$V(k_t)=\frac{1}{1-\beta}\left[\ln(1-\alpha\beta)-\ln(1+\tau-mA)+\frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta}\ln\alpha\beta\right]+\frac{\alpha}{1-\alpha\beta}\ln k_t \tag{7}$$

因此私人资本的动态方程：$k_t=\alpha\beta k_{t-1}^{\alpha}$ (8)

对(8)式作迭代运算得 $k_t=(\alpha\beta)^{(1-\alpha^{t+1})/(1-\alpha)}k_{-1}^{\alpha^{1+t}}$，进一步考虑到 $0<\alpha<1$ 的参数设定，即可得到当 $t\to+\infty$ 时，$k_t\to(\alpha\beta)^{\frac{1}{1-\alpha}}$，即私人资本是渐进收敛于稳态的。

由一阶条件 $1/c=\beta V_k(\tilde{k})(1+\tau-mA)$ 得到：

$$c_t=\frac{1-\alpha\beta}{1+\tau-mA}k_{t-1}^{\alpha}=\frac{1}{\alpha\beta}\frac{1-\alpha\beta}{1+\tau-mA}(\alpha\beta)^{(1-\alpha^{t+1})/(1-\alpha)}k_{-1}^{\alpha^{t+1}} \tag{9}$$

由 $0<\alpha<1$ 可知 $t\to+\infty$ 时，$c_t\to\frac{1}{\alpha\beta}\frac{1-\alpha\beta}{1+\tau-mA}(\alpha\beta)^{1/(1-\alpha)}$，即代表性居民的消费也是渐进收敛的。

政府购买支出为：$g_t=(\tau-A)c_t=(\tau-A)\frac{1}{\alpha\beta}\frac{1-\alpha\beta}{1+\tau-mA}(\alpha\beta)^{\frac{1}{1-\alpha}}\beta^t(\alpha\beta)^{\frac{-\alpha^{t+1}}{1-\alpha}}k_{-1}^{\alpha^{t+1}}$ (10)

由 k_t、c_t 的动态方程的渐进收敛性可知，当 t 充分大时，经济在稳定均衡状态附近。对经济的稳定均衡状态，有以下解析表达式：

$$\alpha k^{ss\alpha-1}=\frac{1}{\beta} \tag{11}$$

$$c^{ss}=\frac{(\alpha\beta)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}-(\alpha\beta)^{\frac{1}{1-\alpha}}}{1+\tau-mA} \tag{12}$$

$$e^{ss}=A\frac{(\alpha\beta)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}-(\alpha\beta)^{\frac{1}{1-\alpha}}}{1+\tau-mA} \tag{13}$$

在确定了居民的最优决策后，接下来分析政府行政机构的最优决策问题。由于代表性居民的消费决策已确定，政府行政机构会考虑到该信息以改善其决策。

由于法律事先规定了投资比例的基本限制范围，从消费表达式(9)和政府购买表达式(10)即可明确公共投资比例 $0\leqslant A<\frac{1+\tau}{m}$ 且 $0\leqslant A<\tau$。

在每期决策时，居民先行，一个按规则行事的政府行政机构只能通过选择公共投资比例来使其效用最大化，即面临下述最大化问题：

$$\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t(\tau c_t-Ac_t) \tag{14}$$

$$s.t: c_t=\frac{1-\alpha\beta}{1+\tau-mA}k_{t-1}^{\alpha}=\frac{1}{\alpha\beta}\frac{1-\alpha\beta}{1+\tau-mA}((\alpha\beta)^{\frac{1-\alpha^{t+1}}{1-\alpha}}k_{-1}^{\alpha^{t+1}} \tag{15}$$

上述问题可简化为如下无约束最优化模型：

$$\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t[(\tau-A)c_t]=(\tau-A)\frac{1}{\alpha\beta}\frac{1-\alpha\beta}{1+\tau-mA}(\alpha\beta)^{\frac{1}{1-\alpha}}\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t(\alpha\beta)^{\frac{-\alpha^{t+1}}{1-\alpha}}k_{-1}^{\alpha^{t+1}} \tag{16}$$

观察表达式(16)可知其最大化问题等价于选择 A 使每期效用最大化，同时由 $A<\tau$ 可知，最大化(15)也等价于最大化下列问题：

$$Max\frac{\tau-A}{1+\tau-mA}=\frac{1}{\frac{1+\tau-mA}{\tau-A}+m} \tag{17}$$

对于公共投资的生产效率的不同情况，政府行政机构的最优行为的结果差异很大，由于公共投资的生产效率 $m\geqslant0$，分以下四种情况详细讨论。

第一种情况：公共投资的生产效率 $m=0$。

在公共投资的生产效率 $m=0$ 时,政府行政机构的最大化问题等价为 $Max\frac{\tau-A}{1+\tau}$,政府行政机构的最优行为会使相对消费的公共投资比例 A 尽量小,考虑到投资比例 A 的限定范围(即 $0\leqslant A<\frac{1+\tau}{m}$ 且 $0\leqslant A<\tau$)得到最优投资比例 $A^*=0$,因此政府行政机构的公共投资水平 $e_t^*=0$,代表性居民的最优消费结果为:

$$c_t=\frac{1}{\alpha\beta}\frac{1-\alpha\beta}{1+\tau}(\alpha\beta)^{\frac{1-\alpha^{t+1}}{1-\alpha}}k_{-1}^{\alpha^{t+1}} \tag{18}$$

由(18)可知当 $t\to+\infty$ 时,$c_t^*\to\frac{1}{\alpha\beta}\frac{1-\alpha\beta}{1+\tau}((\alpha\beta)^{\frac{1}{1-\alpha}}$

代表性居民的终身效用水平为:

$$\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\ln c_t^*=\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\ln\left(\frac{1}{\alpha\beta}\frac{1-\alpha\beta}{1+\tau}(\alpha\beta)^{\frac{1-\alpha^{t+1}}{1-\alpha}}k_{-1}^{\alpha^{t+1}}\right) \tag{19}$$

由对数函数的运算法则并运算求和可知(19)式的级数收敛于某一实数,因此该级数是有限的,即代表性居民终身福利此时只有有限大小。

政府行政机构的购买支出为:

$$g_t^*=(\tau-A)c_t^*=\frac{1-\alpha\beta}{\alpha\beta}\frac{\tau}{1+\tau}(\alpha\beta)^{\frac{1-\alpha^{t+1}}{1-\alpha}}k_{-1}^{\alpha^{t+1}} \tag{20}$$

政府行政机构的终身效用水平为:

$$\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t[(\tau-A)c_t^*]=\frac{1-\alpha\beta}{\alpha\beta}\frac{\tau}{1+\tau}(\alpha\beta)^{\frac{1}{1-\alpha}}\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t(\alpha\beta)^{\frac{-\alpha^{t+1}}{1-\alpha}}k_{-1}^{\alpha^{t+1}} \tag{21}$$

命题　上述(21)式的级数收敛于某一实数。

证明:由于 $0<\alpha^{t+1}<1$,因此 $k_{-1}^{\alpha^{t+1}}$ 对任意大于零的初始私人资本存量均有上下界,由指数函数的性质可知 $(\alpha\beta)^{\frac{-\alpha^{t+1}}{1-\alpha}}$ 关于 t 是严格单调减小的,因此可以判断 $\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t(\alpha\beta)^{\frac{-\alpha^{t+1}}{1-\alpha}}k_{-1}^{\alpha^{t+1}}$ 有上界,定义:

$$S_n=\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t(\alpha\beta)^{\frac{-\alpha^{t+1}}{1-\alpha}}k_{-1}^{\alpha^{t+1}}$$

由上式中参数大于零的假设,可知 $\{S_n\}$ 是严格单调增加的。由数列的单调有界收敛定理可知(21)式的级数收敛于某一实数。由该命题可知,政府行政机构的终身效用水平此时只有有限大小。

第二种情况:公共投资的生产效率 $0<m<\frac{1+\tau}{\tau}$。

由(16)式表示的最大化函数可分解成两个双曲线函数,其中,$\frac{1}{\frac{1+\tau-mA}{\tau-A}+m}$ 关于 $\frac{1+\tau-m\tau}{\tau-A}$ 是一双曲线函数,$\frac{1+\tau-m\tau}{\tau-A}$ 关于 A 是另一双曲线函数。在 的情况下,该双曲线的图形可用图1(a)和图1(b)表示。由公共投资比例 $0\leqslant A<\frac{1+\tau}{m}$ 且 $0\leqslant A<\tau$ 的限制范围可知,在公共投资的生产效率 $0<m<\frac{1+\tau}{\tau}$ 的情况下,该限制范围等价于 $0\leqslant A<\tau$。

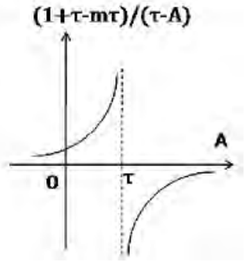

图1(a)　$(1+\tau-m\tau)/(\tau-A)$ 关于 A 的双曲线

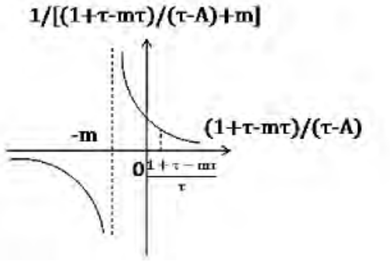

图1(b)　$1/[(1+\tau-m\tau)/(\tau-A)+m]$ 关于 $(1+\tau-m\tau)/(\tau-A)$ 的双曲线

从图1(a)和图1(b)可知,在投资比例范围为 $0\leqslant A<\tau$ 的条件下,政府行政机构的效用函数关于公共

投资比例 A 是严格单调减小的，这时政府行政机构最优行为会选择尽量小的公共投资比例，即 $A^* = 0$。

由最优公共投资比例 A 为零可知政府行政机构的公共投资水平 $e_t^* = 0$。

在公共投资比例为零时，代表性居民的最优消费为：

$$c_t^* = \frac{1}{\alpha\beta}\frac{1-\alpha\beta}{1+\tau}(\alpha\beta)^{\frac{1-\alpha^{t+1}}{1-\alpha}}k_{-1}^{\alpha^{t+1}} \tag{22}$$

由（22）式可知 $t \to \infty$时，$c_t^* \to \frac{1}{\alpha\beta}\frac{1-\alpha\beta}{1+\tau}(\alpha\beta)^{\frac{1-\alpha^{t+1}}{1-\alpha}}$，即居民消费是渐进收敛的。

代表性居民的终身效用水平为：

$$\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t \ln c_t^* = \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t \ln\left(\frac{1}{\alpha\beta}\frac{1-\alpha\beta}{1+\tau}(\alpha\beta)^{\frac{1-\alpha^{t+1}}{1-\alpha}}k_{-1}^{\alpha^{t+1}}\right) \tag{23}$$

政府行政机构的购买支出由（20）式决定，由该式可知当 $t \to \infty$时，$g_t^* \to \frac{1-\alpha\beta}{\alpha\beta}\frac{\tau}{1+\tau}(\alpha\beta)^{\frac{1}{1-\alpha}}$。

政府行政机构的终身效用水平为：

$$\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\left[(\tau - A)c_t^*\right] = \frac{1-\alpha\beta}{\alpha\beta}\frac{\tau}{1+\tau}(\alpha\beta)^{\frac{1}{1-\alpha}}\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t(\alpha\beta)^{\frac{-\alpha^{t+1}}{1-\alpha}}k_{-1}^{\alpha^{t+1}} \tag{24}$$

以上最优化结果是可预料的。在公共投资的生产效率 $0 < m < \frac{1+\tau}{\tau}$ 的情况下，假设政府行政机构减少一单位的公共投资，则其效用因此直接增加一个单位，但公共投资有生产性，其在当期又可使产量减少 m 个单位，由（8）式可知，私人资本的路径不受影响，当期的居民消费因此减少$\frac{m}{1+\tau}$，消费税税收因此减少$\frac{m\tau}{1+\tau}$，由此政府行政机构的效用间接减少$\frac{m\tau}{1+\tau}$。又由于 $m < \frac{1+\tau}{\tau}$，因此$\frac{m\tau}{1+\tau} < 1$，这样政府行政机构的效用净减少$\frac{m\tau}{1+\tau} - 1 < 0$ 个单位。因此政府行政机构的最大化行为会导致公共投资减少，又因为公共投资的边际生产恒为 m（即没有边际生产递减性），因此公共投资趋于无穷小，但由于基本限制范围的存在，公共投资最小只能为零，由此可判定公共投资比例为零符合政府行政机构的最大化利益。

由情况一和情况二的各变量的参数表达式可知，在生产效率 $0 < m < \frac{1+\tau}{\tau}$ 的情况下，内生变量均与 $m = 0$ 时的相同，这就是说，公共投资的生产效率 $0 < m < \frac{1+\tau}{\tau}$ 与 $m = 0$ 的经济结果无任何差异，即公共投资的低效率就是完全没有效率，其最优公共投资均为零，家庭和政府行政机构的各期消费、购买支出及终身效用水平只有有限大小，而且其均与公共投资的生产效率无关，这样公共投资的生产效率 $0 \leqslant m < \frac{1+\tau}{\tau}$ 形成一个梯级，在该梯级上，经济增长和福利水平与具体的公共投资效率无关。

第三种情况：公共投资的生产效率 $m > \frac{1+\tau}{\tau}$。

在公共投资的生产效率 $m > \frac{1+\tau}{\tau}$ 的情况下，$\frac{1+\tau-m\tau}{\tau-A}$ 关于 A 的双曲线函数图形如图 2（a）所示，$\frac{1}{\frac{1+\tau-mA}{\tau-A}+m}$ 关于$\frac{1+\tau-m\tau}{\tau-A}$的双曲线函数图形如图 2（$b$）所示。由公共投资比例 $0 \leqslant A < \frac{1+\tau}{m}$ 且 $0 \leqslant A < \tau$ 的限制范围可知，在公共投资的生产效率 $m > \frac{1+\tau}{\tau}$ 的情况下，该限制范围等价于 $0 \leqslant A < \frac{1+\tau}{m}$。从图 2（$a$）和图 2（$b$）可知，在这一限制范围内，政府行政机构的效用函数对公共投资比例 A 是严格单调增加的，这时政府行政机构最优行为会选择尽量大的公共投资比例，即 $A^* = \frac{1+\tau}{m}\Big|_{-0}$，该式表示最优投资比例以左极限取$\frac{1+\tau}{m}$。

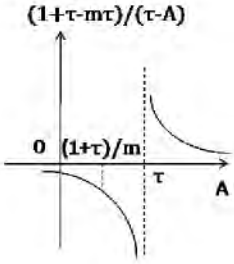

图 2(a)　$(1+\tau-m\tau)/(\tau-A)$ 关于 A 的双曲线

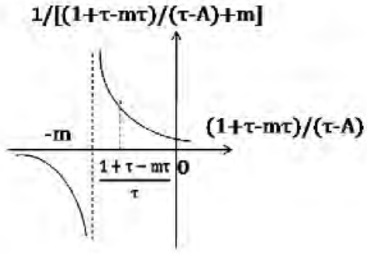

图 2(b)　$1/[(1+\tau-m\tau)/(\tau-A)+m]$ 关于 $(1+\tau-m\tau)/(\tau-A)$ 的双曲线

在公共投资的生产效率 $m>\frac{1+\tau}{\tau}$ 的情况下，由于 $\frac{1}{1+\tau-mA}$ 趋向 $+\infty$，因此，由(9)式可知代表性居民消费的解析表达式是：在 t 有限时，$c^* = +\infty|_{+0}$　(25)

进一步，由(9)式可知 $t\to+\infty$时，$c^*\to+\infty$，因此消费是广义收敛的。

在公共投资的生产效率 $m>\frac{1+\tau}{\tau}$ 的情况下，由于 $\frac{\tau-A}{1+\tau-mA}$ 趋向 $+\infty$，因此，由(10)式可知政府行政机构的公共投资的解析表达式是：$c^* = +\infty|_{+0}$　(26)

代表性居民的终身效用水平：$\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\ln c_t^* = +\infty|_{+0}$　(27)

由(16)式和(17)式及 $A^* = \frac{1+\tau}{m}|_{-0}$ 可知政府购买支出和政府行政机构终身效用水平分别为：

$$g_t^* = (\tau-A)c_t = +\infty|_{+0} \tag{28}$$

$$\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\left[(\tau-A)c_t^*\right] = +\infty|_{+0} \tag{29}$$

式(25)、(26)、(27)、(28)和(29)中的 $+\infty|_{+0}$表示各变量和终身效用水平以 $+\infty$为右极限，其值趋于无穷大。

以上的最优决策结果也是可以预料到的。在公共投资的生产效率 $m>\frac{1+\tau}{\tau}$ 的情况下，若政府行政机构提高一单位的公共投资，则其效用因此直接下降一个单位，但公共投资有生产性，其在当期又可使产量增加 m 个单位，由(8)式可知私人资本的路径不受影响，因此当期的居民消费增加 $\frac{m}{1+\tau}$，因此消费税税收可增加 $\frac{m\tau}{1+\tau}$，由此政府行政机构的效用间接增加 $\frac{m\tau}{1+\tau}$。又由于 $m>\frac{1+\tau}{\tau}$，因此 $\frac{m\tau}{1+\tau}>1$，这样政府行政机构的效用净增加了 $\frac{m\tau}{1+\tau}-1>0$ 个单位。因此政府行政机构的最大化行为会导致公共投资的增加，又因为公共投资的边际生产恒为 m，因此公共投资趋于无穷大，消费会趋于无穷大，因此居民和政府行政机构的福利会趋于无穷大。

由各变量的参数表达式可知，在生产效率 $m>\frac{1+\tau}{\tau}$ 的情况下，最优公共投资、家庭和政府行政机构的各期消费和购买支出及其终身效用水平趋于无穷大，而且均与具体公共投资的生产效率无关。公共投资的生产效率 $m>\frac{1+\tau}{\tau}$ 形成另一个梯级，在该梯级上，经济增长和福利水平与具体的公共投资效率无关。

比较公共投资的效率梯级 $m>\frac{1+\tau}{\tau}$ 与 $0\leqslant m<\frac{1+\tau}{\tau}$ 的情况可知，居民各期消费和终身效用水平及政府行政机构的各期购买支出和终身效用水平在 $\frac{1+\tau}{\tau}$ 上下有一跳跃。根据以上三种情况的论述可知，这是政府行政机构对公共投资的最优化行为决定的，在 $0\leqslant m<\frac{1+\tau}{\tau}$ 的情况下，最优投资比例为零；在 $m>\frac{1+\tau}{\tau}$ 的情况下，最优投资比例趋于限定范围的上限。

第四种情况：公共投资的生产效率 $m = \frac{1+\tau}{\tau}$。

在这种情况下，由(9) **式可以得到代表性居民消费水平为：**

$$c_t^* = \frac{1}{\alpha\beta}\frac{1-\alpha\beta}{1+\tau-\frac{1+\tau}{\tau}A}(\alpha\beta)^{\frac{1-\alpha^{t+1}}{1-\alpha}}k_{-1}^{\alpha^{t+1}} \tag{30}$$

当 $t\to\infty$**时**，$c_t^* \to \frac{1}{\alpha\beta}\frac{1-\alpha\beta}{1+\tau-\frac{1+\tau}{\tau}A}(\alpha\beta)^{\frac{1}{1-\alpha}}k_{-1}^{\alpha^{t+1}}$。 (31)

由(30) **式可以得到代表性居民的终身效用水平为：**

$$\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\ln c_t^* = \ln\alpha\beta\left[\frac{\alpha}{(1-\alpha)(1-\beta)}-\frac{\alpha}{(1-\alpha)(1-\alpha\beta)}\right]+\frac{\alpha}{1-\alpha\beta}\ln k_{-1}+\frac{1}{1-\alpha\beta}\ln\frac{1-\alpha\beta}{1+\tau-\frac{1+\tau}{\tau}A} \tag{32}$$

由(10) **式可以得到政府购买支出为：**

$$g_t^* = (\tau-A)c_t^* = \frac{1}{\alpha\beta}\frac{1-\alpha\beta}{\frac{1+\tau}{\tau}}(\alpha\beta)^{\frac{1}{1-\alpha}}\beta^t(\alpha\beta)^{\frac{-\alpha^{t+1}}{1-\alpha}}k_{-1}^{\alpha^{t+1}} \tag{33}$$

由上述(33) **式可以得到政府行政机构的终身效用水平的解析表达式为：**

$$\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t[(\tau-A)c_t^*] = \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\left[\frac{1}{\alpha\beta}\frac{1-\alpha\beta}{\frac{1+\tau}{\tau}}(\alpha\beta)^{\frac{1-\alpha^{t+1}}{1-\alpha}}k_{-1}^{\alpha^{t+1}}\right] \tag{34}$$

由式(20)、(21)、(28)、(29)、(33) **和**(34) **可知，在公共投资生产效率的四种情况下，对应公共投资的生产效率**$0\leqslant m<\frac{1+\tau}{\tau}$**和**$m>\frac{1+\tau}{\tau}$**两个区间分布，政府各期购买支出、稳态购买支出和政府行政机构的终身效用水平呈二级梯级分布，而且公共投资的生产效率梯级越高，政府行政机构福利水平梯级越高。**

由(33) **式和**(34) **式可知，政府行政机构的购买支出和终身效用水平与公共投资比例无关；由**(30) **和**(32) **可知，代表性居民的各期消费及其终身效用水平跟公共投资比例相关。在** $m = \frac{1+\tau}{\tau}$ **的情况下，由于政府行政机构效用水平与投资比例无关，而代表性居民的终身效用水平与投资比例有关，因此利己的政府行政机构没有动力针对居民的消费及其终身效用无效率而有所作为，由此可以判断，在这种情况下，公共投资的比例是无法内生确定的。**

进一步考虑公共投资比例 A **的法律限制：**$0\leqslant A<\tau$**，各期消费、稳态消费及终身效用水平的范围为：**

$$\frac{1}{\alpha\beta}\frac{1-\alpha\beta}{1+\tau}(\alpha\beta)^{\frac{1-\alpha^{t+1}}{1-\alpha}}k_{-1}^{\alpha^{t+1}} \leqslant c_t^* = \frac{1}{\alpha\beta}\frac{1-\alpha\beta}{1+\tau-\frac{1+\tau}{\tau}A}(\alpha\beta)^{\frac{1-\alpha^{t+1}}{1-\alpha}}k_{-1}^{\alpha^{t+1}} < +\infty$$

$$\frac{1}{\alpha\beta}\frac{1-\alpha\beta}{1+\tau}(\alpha\beta)^{\frac{1}{1-\alpha}} \leqslant c^{ss} < +\infty$$

$$\ln\alpha\beta\left[\frac{\alpha}{(1-\alpha)(1-\beta)}-\frac{\alpha}{(1-\alpha)(1-\alpha\beta)}\right]+\frac{\alpha}{1-\alpha\beta}\ln k_{-1}+\frac{1}{1-\alpha\beta}\ln\frac{1-\alpha\beta}{1+\tau} \leqslant \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\ln c_t^*$$

由此可以判断，在公共资本的生产效率 $m = \frac{1+\tau}{\tau}$ **的情况下，公共投资比例无法内生确定，这会导致居民福利的净损失。**

在公共资本的生产效率 $m = \frac{1+\tau}{\tau}$ **的情况，居民各期消费、稳态消费和终身福利水平仍能保证不少于公共投资生产效率** $0\leqslant m<\frac{1+\tau}{\tau}$ **时的水平。这样在公共投资的生产效率的四种情况下，对应公共投资的生产效率在**$0\leqslant m<\frac{1+\tau}{\tau}$、$m=\frac{1+\tau}{\tau}$**和**$m>\frac{1+\tau}{\tau}$**三个区间的分布，居民福利水平呈三级梯级分布，而且公共投**

资的生产效率梯级越高，居民福利水平梯级越高。

由(34)式得 $e_t^* = A\frac{1}{\alpha\beta}\frac{1-\alpha\beta}{1+\tau-\frac{1+\tau}{\tau}A}(\alpha\beta)^{\frac{1-\alpha^{t+1}}{1-\alpha}}k_{-1}^{\alpha^{t+1}}$，由此可知：

$$\text{当 } t\to\infty \text{ 时}, e_t^* \to e^{ss} = A\frac{1}{\alpha\beta}\frac{1-\alpha\beta}{1+\tau-\frac{1+\tau}{\tau}A}(\alpha\beta)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{35}$$

由(35)可知公共投资无法内生确定。进一步，因为公共投资比例 A 的基本限制：$0 \leqslant A < \tau$

$$\text{所以 } 0 \leqslant e_t^* < +\infty, 0 \leqslant e^{ss} < +\infty。 \tag{36}$$

在公共投资的生产效率 $0 \leqslant m < \frac{1+\tau}{\tau}$ 的情况下，最优公共投资为零；在公共投资的生产效率 $m = \frac{1+\tau}{\tau}$ 的情况下，最优公共投资如(36)所示有限大小的实数，而在公共投资的生产效率 $m > \frac{1+\tau}{\tau}$ 的情况下，最优公共投资如(26)所示会趋于无穷大。对于公共投资在不同公共投资效率下的这种梯级分化有一个经验性的检验。如我国在高速公路、高铁等高收益项目上的投入增长迅猛，以高速公路来说，从1988年起步到通车1万公里，用了12年，从1万公里到突破2万公里，只用了4年，从2万公里到突破3万公里只用了2年。而在基础科研、教育、卫生、垃圾回收和处理、污水处理及农田水利等低收益项目上的投入却长期处于低水平。这种不同项目投资的巨大差异是我国政府主导公共投资的增长方式的必然结果。

四、结论和政策意义

本文深入分析了公共投资的内在确定机制及其福利影响，在政府主导公共投资的增长方式下，可以看到公共投资决策依赖于公共投资的效率的梯级水平，其效率梯级差别会导致显著的福利水平差异，这是政府主导公共投资的增长方式的一个突出特征。对于中国经济转型，特别是在当前扩大内需战略下，提高公共投资效率梯级具有特别重要的福利经济学含义。具体地，有如下政策意义：

首先，以法律制度确保公共投资效率。由公共投资的生产效率的四种情况的分析可知，在政府主导公共投资的增长方式下，在公共投资的高效率 $m > \frac{1+\tau}{\tau}$ 的梯级高上，居民和政府行政机构有较高的福利水平；在公共投资的低效率 $0 < m < \frac{1+\tau}{\tau}$ 的梯级上，居民和政府行政机构的福利水平较低，提高公共投资的效率符合居民和政府行政机构双方的利益。公共投资 $0 < m < \frac{1+\tau}{\tau}$ 和 $m = 0$ 有相同的结果，若无更多的公共投资规则，较低效率的公共投资与零效率的公共投资必然有相同的福利水平，提高公共投资的效率超过 $\frac{1+\tau}{\tau}$ 可显著提升经济整体的福利水平。因此，在当前政府主导公共投资的增长方式下，需要深化公共投资体制改革，制定公共投资促进法等措施提高公共投资的效率并使其整体在关键值之上，这对居民和政府行政机构是双赢的举措。

其次，对高收益项目、低收益项目的公共投资进行合理搭配。在现有的政府主导公共投资的框架下，若对公共投资没有特定规则限制，则政府行政机构的最优行为必然导致投资过热和不足会同时存在，若公共投资项目的边际生产率不变，则对如高速公路之类的高收益项目投资会趋于无穷大，而对教育和基础科研项目投资则会为零，但完全倾向高速公路之类的资产必然会使得公共投资整体的边际生产率下降，而一旦公共投资各种项目的生产效率处于 $0 \leqslant m < \frac{1+\tau}{\tau}$ 的梯级，最优公共投资必然会为零，因此整个经济的福利水平将最终受到重大不利影响，因此为保证经济整体的高福利的延续，公共投资不能只集中在暂时的高收益项目上，对于教育、基础科研、新能源新材料等暂时的低收益项目一定要有长远的发展眼光，不能因为暂时的低收益而无投资，也不能因为暂时的高收益而无限制的投资，合理的处理方式是对当前暂时的高投资收益项目和暂时的低投资收益项目进行搭配，只有为未来培育新的增长点，才能保证经济增长和整体经济福利水平不会出现大起大落。

最后，引入公共投资的社会协商机制。在 $m = \frac{1+\tau}{\tau}$ 的情况下，虽然政府行政机构不会因投资比例的确定受到任何不利影响，但居民福利却不能得到帕累托改进，显然，这是由于此时缺少确定公共投资比例的机制导致的，因此为解决福利净损失可以引入投资比例决策的补充机制，如适时引入民众协商参与公共投资政策，这不会影响政府行政机构但可以提高居民福利水平。

参考文献：

[1] Arrow, K. J. The Economic Implications of Learning by Doing [J]. Review of Economic Studies, 1962(29): 155 - 173.
[2] Young, Alwyn. Learning by Doing and the Dynamic Effects of International Trade [J]. Quarterly Journal of Economics, 1991(106): 369 - 405.
[3] Romer, Paul M. Increasing Returns and Long Run Growth [J]. Journal of Political Economy, 1986(94): 1002 - 1037.
[4] Romer, Paul M. Endogenous Technological Change [J]. Journal of Political Economy, 1990(98): 71 - 102.
[5] Lucas, Robert E., Jr. On the Mechanics of Economic Development [J]. Journal of Monetary Economics, 1988(22): 3 - 42.
[6] Grossman, Gene M. and Helpman, Elhanan, Quality ladders in the theory of growth. The Review of Economic Studies, 1991(58): 43 - 61.
[7] Philippe Aghion; Peter Howitt, A Model of Growth Through Creative Destruction. Econometrica, 1992(60): 323 - 351.
[8] Barro, Robert J. Government Spending in a Simple Model of Endogenous Growth [J]. Journal of Political Economy, 1990(98): 103 - 125.

The Endogenous Growth based on Public Investment: Model and Policy

REN Li[1], GAO Lei[2]
(1. School of Economics, Xiamen University, Xiamen, Fujian 361005, China;
2. Xintai Commerce Bureau, Xintai, Shangdong 271200, China)

Abstract: Since public investment is led by all levels of government in China, based on Ramsey - Cass - Koopmans model, this paper introduces the optimizing behavior for government administrative, indicates that the efficiency of public investment have an affect on economic growth and welfare under the the government - led public investment growth model. The result shows that the efficiency of public investment and the level of residents welfare appear a gradient distribution and increase in direct proportion. Therefore, effective measures must be taken to improve the efficiency of public investment and it is vital importance, which means a win - win initiative for residents and government.

Key words: endogenous growth; efficiency gradient of public investment; welfare of the residents

（责任编辑：张秋虹）