

# 二元 Copula 函数的投资组合模型选择

张学仁

(江西财经大学 信息管理学院 江西 南昌 330032)

**摘要:** Copula 模型是组合投资风险评估中常用模型,它具有多种不同的类型,模型选择的好坏对风险评估结果具有至关重要的影响。本文主要比较了二元正态 Copula 模型和二元 t-Copula 模型对中国股市数据拟合的优劣程度。针对这两种模型,利用上证综指、深证成指、上证基金、深证基金、东风汽车、中国石化、宝钢股份和万家乐的日收盘价数据估计相应的参数得到相应的拟合分布,然后分别与经验 Copula 函数作比较,通过计算拟合分布与经验分布之间的距离,得出二元 t-Copula 函数能更好地拟合两组投资组合的日收益率数据的结论。

**关键词:** 投资组合; 二元正态 Copula; 二元 t-Copula; 距离比较

**中图分类号:** F830.9 **文献标识码:** A **文章编号:** 2095-0098(2013)06-0034-03

## 一、引言

Copula 函数是一种将随机变量的联合分布函数与它们各自的边缘分布连接起来的函数,即一种连接函数。最早的 Copula 理论是由 Sklar<sup>[1]</sup> 在 1959 年提出的,由于受技术条件等的限制, Copula 理论始终没有得到很好的应用。而随着信息技术的迅猛发展, Copula 理论在 90 年代以后就被广泛应用于金融领域,<sup>[2-3]</sup> 国内的张尧庭从理论上探讨了 Copula 应用在金融上是可行的,并得出 Copula 技术能够更加准确分析变量间的相关结构。<sup>[4]</sup> 孔繁利等研究了 Copula 理论在证券投资基金中的应用。<sup>[5]</sup>

二元 Copula 函数种类有很多,本文研究的是将投资组合分别用两种 Copula 函数连接,得到两种模型,再从中选择最优的模型。选取上证综合指数和深证成指、上证基金和深证基金、东风汽车和中国石化以及宝钢股份和万家乐这四组投资组合作为研究对象,结合二元正态 Copula 函数和二元 t-Copula 函数,比较两种 Copula 函数对投资组合的拟合效果模型,选出最优模型。

## 二、二元 Copula 函数的分类

Copula 函数的种类主要有正态 Copula 函数、t-Copula 函数和阿基米德 Copula 函数等。本文主要介绍前面两种形式的二元 Copula 函数。

### (一) 二元正态 Copula 函数

二元正态 Copula 分布函数的表达式为<sup>[6]</sup>

$$C^n(u, v) = \int_{-\infty}^{\varphi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\varphi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-a^2}} \exp\left[-\frac{x^2 - 2axy + y^2}{2(1-a^2)}\right] dx dy \quad (1)$$

$\varphi^{-1}$  表示标准正态分布的分布函数的逆函数,  $a$  是变量间的秩相关系数。

### (二) 二元 t-Copula 函数

二元 t-Copula 分布函数的表达式为:<sup>[6]</sup>

收稿日期: 2013-10-22

作者简介: 张学仁(1989-),男,安徽蚌埠人,硕士研究生,主要研究方向为金融工程和投资分析。

$$C(u, v) = \int_{-\infty}^{t_n^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{t_n^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi \sqrt{1-a^2}} \left[ 1 + \frac{x^2 - 2axy + y^2}{n(1-a^2)} \right]^{-(n+2)/2} dx dy \quad (2)$$

$t_n^{-1}$  表示自由度为  $n$  的一元  $t$  分布函数的逆函数  $n$  为自由度  $\rho$  是秩相关系数。

### 三、经验 Copula 函数

设取自总体  $(X, Y)$  的样本是  $(x_i, y_i) (i = 1, \dots, m)$   $h(x)$  是  $X$  的经验分布函数  $k(y)$  是  $Y$  的经验分布函数, 那么总体样本的经验 Copula 可以表示成<sup>[7]</sup>

$$C(u, v) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m I_{[h(x_i) \leq u]} I_{[k(y_i) \leq v]} \quad u, v \in [0, 1] \text{ 其中 } I_{[\cdot]} \text{ 是示性函数。} \quad (3)$$

### 四、实证分析

本文选取的数据为: 上证综指(1A0001)、深证成指(2A01)、上证基金(1B0008)、深证基金(399305)、东风汽车(600006)、中国石化(600028)、宝钢股份(600019)和万家乐(000533)同时期日开盘价、收盘价等各1300组数据, 时间跨度为2005年11月09日至2011年7月20日。

第一步: 分别对随机变量  $X, Y, X_1, Y_1, X_2, Y_2$  以及  $X_3, Y_3$  进行正态性检验, 以确定其分布。其基本统计量如下表1所示。

表1 原始各收益率序列统计量

| 股票   | 项目 | 均值     | 标准差    | 偏度      | 峰度      | K-S 统计量 | P 值     |
|------|----|--------|--------|---------|---------|---------|---------|
| 上证综指 | X  | 0.0007 | 0.0200 | -0.3726 | 5.2759  | 1       | 0.00000 |
| 深证成指 | Y  | 0.0012 | 0.0224 | -0.3582 | 4.7717  | 1       | 0.00000 |
| 上证基金 | X1 | 0.0013 | 0.0192 | 0.3207  | 8.2738  | 1       | 0.00000 |
| 深证基金 | Y1 | 0.0016 | 0.0195 | 0.3410  | 8.3437  | 1       | 0.00000 |
| 东风汽车 | X2 | 0.0006 | 0.0297 | -0.3441 | 5.1756  | 1       | 0.00017 |
| 中国石化 | Y2 | 0.0005 | 0.0293 | -0.1104 | 10.3189 | 1       | 0.00000 |
| 宝钢股份 | X3 | 0.0003 | 0.0294 | 0.4228  | 9.3027  | 1       | 0.00000 |
| 万家乐  | Y3 | 0.0007 | 0.0344 | -0.4031 | 5.1033  | 1       | 0.00000 |

由上表可知随机变量  $X, Y, X_1, Y_1, X_2, Y_2, X_3, Y_3$  的分布均比较对称, 并且呈现出尖峰厚尾的特点, 但正态分布是薄尾的, 可以初步判定  $X, Y, X_1, Y_1, X_2, Y_2, X_3, Y_3$  均不服从正态分布。其次, 在显著性水平为 0.05 的条件下, 根据 Kolmogorov - Smirnov 拟合优度检验<sup>[8]</sup> 得出的 P 值远小于 0.05, 可以肯定  $X, Y, X_1, Y_1, X_2, Y_2, X_3, Y_3$  都不服从正态分布。

第二步: 选择合适的 Copula 函数。  $X, Y, X_1, Y_1$  服从的是对称的尖峰厚尾分布, 因此选取二元正态 Copula 函数和二元 t - Copula 函数。

第三步: 计算 Copula 函数中的参数, 即 Spearman 秩相关系数  $\alpha$ 。设  $(X', Y')$  是相互独立的并与  $(X, Y)$  有相同分布的二维随机向量, 定义  $X, Y$  的 Spearman 秩相关系数<sup>[9]</sup>:  $\alpha = 3\{P[(X - X')(Y - Y') > 0] - P[(X - X')(Y - Y') < 0]\}$  (4)

于是, 用 Matlab 计算得出各投资组合在二元正态 Copula 函数和二元 t - Copula 函数的参数如表 2 所示。

表2 各投资组合在两类函数中的参数

| 投资组合      | 参数     | 二元 t - Copula 函数        |     |
|-----------|--------|-------------------------|-----|
|           |        | 二元正态 Copula 函数 $\alpha$ | $n$ |
| 上证综指和深证成指 | 0.9217 | 0.9290                  | 3   |
| 上证基金和深证基金 | 0.6138 | 0.6214                  | 3   |
| 东风汽车和中国石化 | 0.4854 | 0.5415                  | 3   |
| 宝钢股份和万家乐  | 0.4082 | 0.4341                  | 4   |

第四步:对四组投资组合的八个模型进行分析。本文需要比较说明哪种函数构造的模型能更好地拟合两市的收益率数据。于是,引入经验 Copula 函数,并用两种函数构造的模型与经验 Copula 函数之间的距离来测度模型的优劣,即

$$L^n = \int |C(u, v) - C^n(u, v)| du dv \quad L^t = \int |C(u, v) - C^t(u, v)| du dv \quad (5)$$

其中  $L^n$  表示用二元正态 Copula 函数构造的模型与经验 Copula 函数间的距离,  $L^t$  表示用二元 t-Copula 函数构造的模型与经验 Copula 函数间的距离。

当  $L^n < L^t$  则说明二元正态 Copula 函数能更好地拟合数据;当  $L^n > L^t$  则说明二元 t-Copula 函数能更好地拟合数据。那么,用 Matlab 得出的最终结果如表 3 所示。

表 3 各投资组合在两类函数中的参数

| 投资组合 \ 距离 | $L^n$   | $L^t$  |
|-----------|---------|--------|
| 上证综指和深证成指 | 7.2777  | 5.8456 |
| 上证基金和深证基金 | 11.2477 | 9.0127 |
| 东风汽车和中国石化 | 11.0852 | 6.0629 |
| 宝钢股份和万家乐  | 9.8019  | 6.8672 |

## 五、结论

本文根据给出的二元正态 Copula 函数和二元 t-Copula 函数,构造基于收益率的投资组合模型,建立投资组合的联合分布函数。通过实证分析,比较了两种函数构造的模型的优劣,通过尾部相关性分析和与经验 Copula 的距离比较得出二元 t-Copula 函数能更好地拟合上证综合指数和深证 A 指以及东风汽车和中国石化两组投资组合的日收益率数据。

利用这种选择方法,能够为此后用 Copula 函数估计投资组合 VaR 提供便利。需要进一步研究的是风险价值 Copula 计量方法的实证分析,而将 Copula 理论应用于多变量的尾部相关问题也有待进一步的研究。

## 参考文献:

- [1] Sklar A. Fonctions de repartition a dimensions et leurs marges [J]. Publication de l'Institut de Statistique de l'Universite de Paris, 1959: 229 - 231.
- [2] Genest C, Rivest L P. On the multivariate probability integral transformation [J]. Statistics and Probability Letters, 2001, 53(4): 391 - 399.
- [3] Vaz de Melo Mendes Beatriz, Martins de souza Rafael. Measuring financial risks with copulas. International Review of Financial Analysis, 2004.
- [4] 张尧庭. 连接函数(Copula)技术与金融风险分析[J]. 统计研究, 2002(4): 48 - 51.
- [5] 孔繁利, 段素芬, 华志强. Copula 度量投资组合 VaR 的应用研究[J]. 内蒙古民族大学学报, 2006(6): 604 - 606.
- [6] 陈希孺. 高等数理统计学[M]. 北京: 中国科学技术大学出版社, 2009.
- [7] 谢中华. Matlab 统计分析与应用: 40 个案例分析[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2010.
- [8] 吴振翔, 叶五一, 缪柏其. 基于 Copula 的外汇投资组合风险分析[J]. 中国管理科学学报, 2004(4): 1 - 5.
- [9] Roger B. Nelsen. An Introduction to Copulas. Springer, 2007.

(下转第 45 页)

[8] 丁忠民, 朱晓姝. 金融发展与城乡居民收入差距的实证研究[J]. 贵州财经大学学报, 2013(4).

## The Dynamic Study of Financial Development ,Economic Growth and Urban – Rural Income Disparity of Anhui Province

ZHAO Na , HUA Yuyan

( College of Fnance ,Anhui University of Finance and Economics ,Bengbu ,Anhui 233030 ,China)

**Abstract:** As the financial development and economic growth ,urban – rural income disparity also is gradually expanding. The relationship among financial development ,economic growth and urban – rural income disparity is becoming the focus of researchers at home and abroad. Therefore ,in this paper ,we use co – integration test ,vector error correction( VEC) model for empirical research of the relevant data of 1990 – 2011 in Anhui province. The results show that in the short term ,financial development narrows the urban – rural income disparity ,economy growth expands the disparity; instead ,in the long term ,financial development expands the urban – rural income disparity ,economy growth expands the disparity. Upon it ,we can put forward suggestions on shortening the urban – rural income disparity.

**Key words:** financial development; economic development; income disparity; co – integration test; ( VEC) model

( 责任编辑: 黎 芳)

( 上接第 36 页)

## Bivariate Copula Function of Portfolio Model Selection

ZHANG Xueren

( School of Information Technology ,Jiangxi University of Finance and Economics ,  
Nanchang ,Jiangxi 330032 ,China)

**Abstract:** Coplua model is commonly used in the portfolio risk assessment ,it has many different types of models ,stand or fall of model selection has a crucial influence on the risk assessment result. This essay compares bivariate normal Copula model with bivariate t – Copula model on China’s strengths and weaknesses of the stock market by fitting the data. For both models ,using Shanghai Composite Index ,Shenzhen Component Index ,SSE Fund ,Shenzhen Securities Fund ,Dongfeng Motor ,Sinopec ,Baosteel and Macro’s closing price data estimates the corresponding parameters of the corresponding fitting distribution ,then compares with the experience of Copula functions separately. By calculating the distance between fitted distribution and the empirical distribution ,the essay comes to a conclusion that the bivariate t – Copula function is better fitting the daily yield rate data of the two investment portfolios.

**Key words:** investment portfolio; bivariate normal Copula; bivariate t – Copula; distance comparison

( 责任编辑: 黎 芳)